T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
LISTA 12 - powtórkowa

Wrocław, 4 czerwca 2010

ZADANIE 0. Dokończyć listę 11.

ZADANIE 1. Udowodnij, że funkcja rzeczywista ciągła na dziedzinie zwartej osiąga swoje ekstrema.

ZADANIE 2. Udowodnij, że funkcja określona na dowolnej przestrzeni metrycznej o przeciwdziedzinie zwartej, której wykres jest domknięty, jest ciągła.

ZADANIE 3. Wykaż, że zbiór $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ (ciągów o trzech wartościach 0,1,2) z topologią zbieżności po współrzędnych jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.

ZADANIE 4. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ciągłą z jednej przestrzeni metrycznej w drugą. Uzasadnij, że przeciwobrazy zbiorów typu G_δ są typu G_δ i że przeciwobrazy zbiorów typu F_σ są typu F_σ. Czy przeciwobraz zbioru I kategorii musi być I kategorii? Czy przeciwobraz zbioru rezydualnego musi być rezydualny? Czy pomoże założenie, że f jest surjekcją?

ZADANIE 5. Wykaż że skończona suma zbiorów typu G_δ jest typu G_δ.

ZADANIE 6. Czy zbiór liczb niewymiernych jest typu F_σ na prostej?

ZADANIE 7. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ciągłą. Wykaż, że zbiór punktów w Y których przeciwobrazy są jednopunktowe jest typu G_δ.

ZADANIE 8. Udowodnij, że jeśli X jest przestrzenią zupełną i przeliczalną, to istnieje w niej punkt izolowany. Co więcej, zbiór punktów izolowanych jest gęsty. Punkt izolowany, to taki, że pewna kula wokół niego nie zawiera innych punktów. (Wsk. Można skorzystać z Tw. Baire'a.)

Tomasz Downarowicz